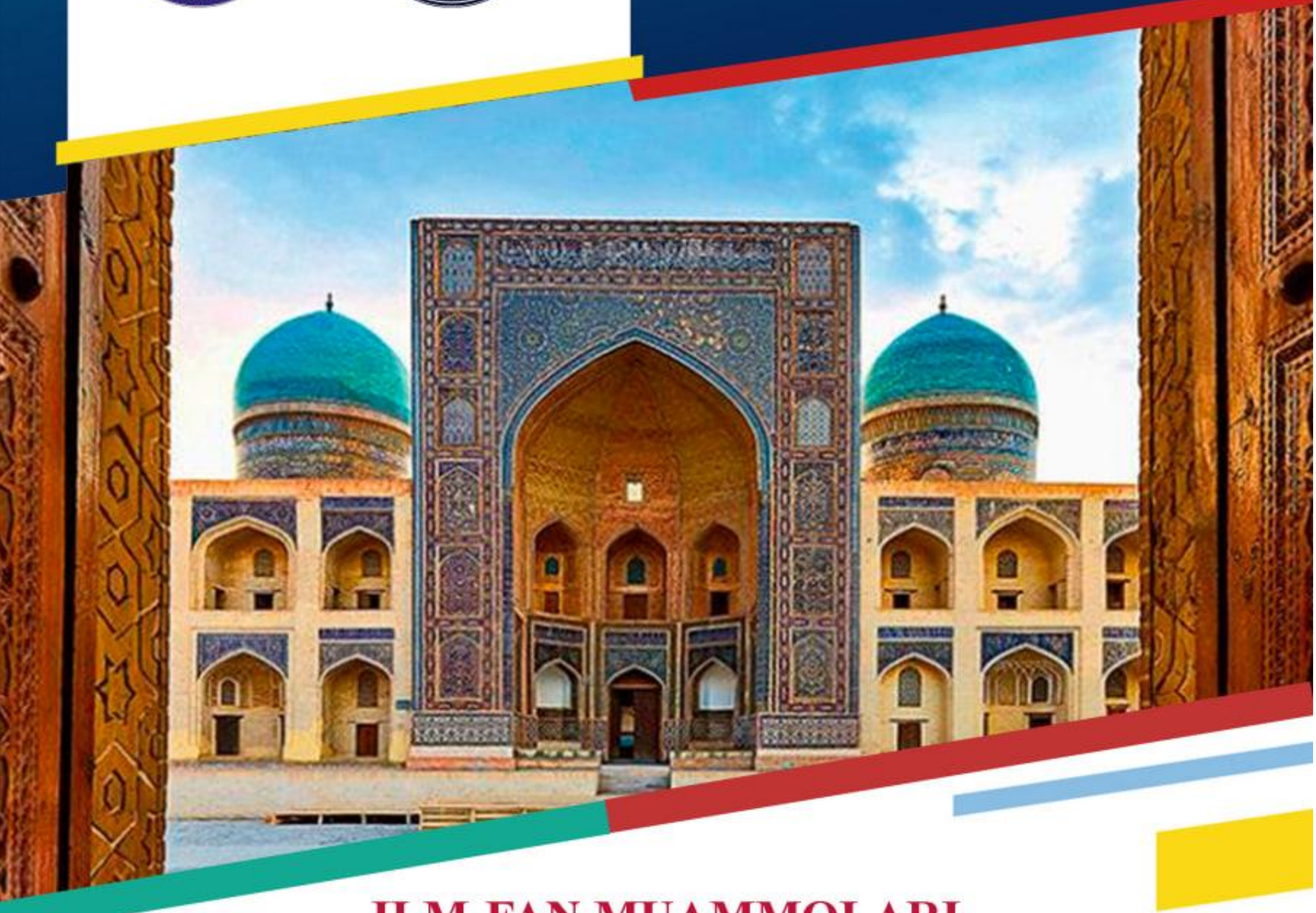
XO'JAND DAVLAT UNIVERSITETI
(TOJIKISTON)
"INTERPRETATION AND RESEARCHES"
XALQARO ILMIY JURNALI
(O'ZBEKISTON)



ILM-FAN MUAMMOLARI TADQIQOTCHILAR TALQINIDA

III XALQARO ILMIY KONFERENSIYA

КОНФЕРЕНСИЯИ ИЛМИИ БАЙНАЛМИЛАЛӢ

"МУАММОҲОИ ИЛМУ ФАН АЗ НИГОҲИ МУҲАҚҚИҚОН"

https://interpretationandresearches.uz

Mazkur xalqaro konferensiya ilm-fan va ta’lim sohalarida faoliyat olib borayotgan professor oʻqituvchilar, tadqiqotchilar, talabalar, magistrantlar, doktorantlar va yosh olimlarning ilmiy tadqiqot natijalarini keng yoritish maqsadida Xoʻjand davlat universiteti (Tojikiston) va “Interpretation and researches” xalqaro ilmiy jurnali tahririyati (Oʻzbekiston) tomonidan tashkil etildi.

МАВОДИ

конференсияи илмии байналхалқии

“МУАММОҲОИ ИЛМУ ФАН АЗ НИГОҲИ МУҲАҚҚИҚОН”

“ILM-FAN MUAMMOLARI TADQIQOTCHILAR TALQINIDA”

mavzusidagi xalqaro ilmiy konferensiya

MATERIALLARI TOʻPLAMI

25.05.2024

Масъалаҳои мубрами фанҳои дақиқ ва табиӣ

Aniq va tabiiy fanlarning dolzarb masalalari

Xoʻjand, Fargʻona

Xalqaro konferensiya tahrir hay'ati a'zolari

KOMPLEKS O’ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRALINI TOPISH

Abdullayev Sarvar Anvar o‘g‘li
Buxoro davlat Pedagogika instituti Aniq fanlar kafedrasi o‘qituvchisi
abdullayevsarvar@buxdpi.uz

Annotatsiya Bu ish asosan kompleks o’zgaruvchili funksiyalarni integrallashni o’rganishdan iborat bo’lib, dastlab kompleks o’zgaruvchili funksiya integrali tushunchasiga tariflar berilgan va ushbu tariflarga doir bir nechta misollar ishlab ko’rsatilgan.

Kalit so’zlar: To’g’rilanuvchi chiziq, uzluksiz funksiya, silliq chiziq, soha, Jordan chiziqlari, golomorf.

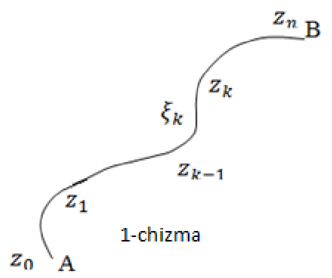
Abstract: This work mainly consists of studying the integration of functions with complex variables, and at first, tariffs are given to the concept of integration of functions with complex variables, and several examples of these tariffs are shown.

Key words: Rectifying line, continuous function, smooth line, sphere, Jordan lines, holomorph.

Tekislikdagi Γ to’g’rilanuvchi chiziqda $w = f(z)$ bir qiymatli funksiya berilgan bo’lsin. Γ chiziqning boshlang’ich α nuqtasidan oxirgi β nuqtasiga qarab uzluksiz harakat qilinganda ketma-ket uchraydigan $\forall\alpha = z_0, z_1, \dots, z_n = \beta$ nuqtalarni olamiz va quyidagi integral yig’indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \quad (1)$$

$\tilde{A}$ chiziqning z_k va z_{k+1} nuqtalarini tutashtiruvchi qismini S_k ,uning uzunligini esa dS_k bilan belgilaymiz.



1-Ta'rif. Agar $\max_{0\le k\le n-1} d\,S_k \to 0$ da (1) yig'indi $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda aniq chekli limitga intilsa, u holda $f(z)$ funksiya Γ chiziq bo'yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu limitning qiymatiga $f(z)$ funksiyaning Γ chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va u

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\substack{\max dS_k \to 0 \\ 0\le k\le n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)$$

kabi belgilanadi.

1-Teorema. Agar $f(z)$ funksiya Γ to'g'rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\int_{\Gamma} f(z)dz$ integral mavjuddir.

Isbot. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$z_k = x_k + iy_k, f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + iv_k,$

$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$

U holda (1) yig'indi quyidagicha ifodalanadi.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$= \sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$ (2).

Bu (2) ifodaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisenti haqiqiy analizda o'rganilgan $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ko'rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning integral yig'indilaridir. Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar Γ to'g'rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bunday integral mavjuddir. Teorema shartiga ko'ra $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar to'g'rilanuvchi Γ chiziqda uzluksiz bo'lganligi uchun bu yerdan $\max_{0\le k\le n-1} d\,S_k \to 0$ da (2) tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'indining mos ravishda aniq chekli $\int_\Gamma udx - vdy$ va $\int_\Gamma vdx + udy$ limitlarga intilishi kelib chiqadi. Demak, (2) ning chap tomoni ham aniq chekli limitga ega va bu limit quyidagiga teng:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma vdx + udy \quad (3).$$

1-teorema isbot bo'ldi.

Integralni hisoblash. (3) formula quyidagicha yozilsa yaxshi esda saqlanadi:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u + iv)(dx + idy) \quad (3^1).$$

Bu integralni hisoblash maqsadida Γ chiziqni silliq va $z = z(t), (a \le t \le b)$ tenglamaga ega desak, (3^1) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b \{u[z(t)] + iv[z(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)dt =$$

$$= \int_a^b Re\{\, f[z(t)]\, z'(t)\}dt + i\int_a^b Im\{\, f[z(t)]z'(t)\}dt \quad (4).$$

(4) formulaga ko'ra kompleks funksiya integralini hisoblash masalasi haqiqiy funksiyalarning odatdagi aniq integrallarini hisoblashga keltirilar ekan.

1-Misol. $\int\limits_{|z-a|=R} \dfrac{dz}{z-a}$ integral hisoblansin. Bu yerda $|z-a| = R$ aylana soat strelkasiga teskari yo'nalishda o'tiladi.

Yechish. Aylana silliq chiziq bo'lib, uning parametrik tenglamasi $z = a + \mathrm{Re}^{it}, (0 \le t \le 2\pi)$ dan iborat. $dz = z'(t)dt = i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt$ bo'lganligidan (4) ga asosan

$$\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,Re^{it}\,dt}{Re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

2-Teorema. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz, γ egri chiziq ushbu $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $z'(t) \ne 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[|z(t)|] \cdot z'(t)dt \ (5)$$

bo'ladi.

Kompleks analizda sohaning chegarasi bo’yicha olingan integrallar muhim rol o’ynaydi. Faraz qilaylik, D soha chegarasi chekli dona yopiq to’g’rilanuvchi Jordan chiziqlaridan iborat bo’lsin.

2-Ta’rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasi ∂D da uzluksiz bo’lsa, u holda ∂D bo’yicha musbat yo’nalishda $f(z)$ funksiyadan olingan integral deb, ∂D ni tashkil etuvchi barcha chiziqlar bo’yicha $f(z)$ dan olingan integrallarning yig’indisiga aytiladi:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f(z)dz,$$

bu yerda $\tilde{A}_k$ -chiziqlardagi integrallash yo’nalish shunaqaki, shu yo’nalish bo’ylab harakat qilganda soha chap tomonda qoladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya chekli va bir bog’lamli G sohada analitik bo’lsa, u holda G sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo’lakli-silliq C chiziq bo’yicha $f(z)$ funksiyadan olingan integral 0 ga teng, ya’ni

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

2-Misol. Ushbu $I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz$ (n –butun son)

integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in C : |z-a| = \rho,\ \rho > 0\}$ aylanadan iborat (yo'nalish soat strelkasining yo’nalishiga qarama-qarshi olingan).

Yechish. γ aylananing tenglamasini quyidagi $z = z(t) = a + \rho \cdot e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ ko'rinishida yozib olamiz. Unda $dz = d(a + \rho \cdot e^{it}) = i\rho \cdot e^{it}dt$ bo'lib, (5)-formulaga ko'ra $I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt$ bo'ladi.

Agar $n \ne -1$ bo'lsa, $I_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt = i\rho^{n+1} \cdot \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0$

bo'ladi. Agar $n = -1$ bo'lsa $I_{-1} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

bo'ladi. Demak,

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, \text{агар} n \ne -1 \text{булса} \\ 2\pi i, \text{агар} n = -1 \text{булса} \end{cases}$$

3-Misol: Ushbu

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz$$

integralni hisoblang, bunda

$$\gamma = \{z = x + iy \epsilon C_z : \ x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

yopiq chiziqdan iborat.

Yechish. Ravshanki, $x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0 \ \Rightarrow$

$$x^2 + (y+3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Demak, $\gamma = \{z\epsilon C_z : |z + 3i| = 3\}$ bu aylana bilan chegaralangan sohani – doirani D deylik: $D = \{z\epsilon C_z : |z + 3i| < 3\}$.

Agar $f(z) = \frac{\sin z}{z-2i}$ deyilsa, unda berilgan integral quyidagicha

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz$$

bo’ladi.

$f(z)$ funksiya $\overline{D}$ da golomorf bo’lgani uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz = f(-2i).$$

bo’ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz = -2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-2i - 2i} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} i \cdot sh2$$

Demak,

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz = \frac{\pi}{2} i \cdot sh2$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. A.G.Kurosh Oliy algebra kursi. Toshkent “O’qituvchi” 1976

2. Uzoqboyev, A., Abdullayev, S., & Abriyev, N. (2023). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo’llanishi.

Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, *3*(1), 92-100.

3. Abdullayev S. Qisqartma konuslarini topish. *Innovations in Technology and Science Education*, *2*(11), 90-93. (2023)

4. Abdalimovna, B. M. Abdullayev Sarvar Anvar o’g’li. Uchburchakli gidrosilindirik mexanizimni holat funksiyasining maxsus nuqta atrofida asimtotik tasvirlanishi *Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ*, (21).

5. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov Algebra va sonlar nazariyasi (o’quv qo’llanma). Toshkent. “Tafakkur-bo’stoni” 2019.

6.Брюно А.Д. Солеев А. Локальная униформизация ветвей пространственной кревой и многоранники Ньютона // Алгебра ианализ Т. 3, вып. 1, (1991), С. 67-102.

7. A.Soleyev, X.Nosirova. Darajali geometriyaning chiziqli bo’lmagan masalalarga qo’llanilishi. Monografiya**.** Samarqand: SamDU, 2017.

8. Баротов А.С. Алгоритм вычисления особенностей алгебраических кривых возникающих в робототехнике// Узбекский математический журнал.-Ташкент, 2011.-№ 1.-С.11-20.

9. Брюно А.Д. Солеев А. Локальная униформизация ветвей пространственной кревой и многоранники Ньютона // Алгебра ианализ Т. 3, вып. 1, (1991), С. 67-102.

10. Брюно А.Д. Солеев А. Классификация особенностей функции положения механизмов // Проблемы машиностроения инадежности машин. № 1, 1994.С.102-109.